|  |
| --- |
|  |
| Raport ze statystyki stosowanej – rozwiązanie listy 8 |
| Antoni Krzak i Wojciech Haładewicz |
|  |
| **Grupa w środy o 15** |
| **6/18/2024** |

|  |
| --- |
|  |

1. Wstęp

Celem raportu jest rozwiązanie listy 8. Polega ono na weryfikacji odpowiednich hipotez podanymi metodami w zadaniach 1 i 2 oraz wyznaczenie prawdopodobieństwa popełnienia błędów I i II rodzaju i sprawdzenie mocy testów. Do tego posłużymy się danymi dostępnymi na stronie oraz możliwościami programu Python, w tym biblioteki BeautifulSoup do przeniesienia danych do programu, numpy oraz scipy do obliczeń, a także matplotlib do wygenerowania odpowiednich wykresów.

Zamieszczamy również odpowiednie definicje podstawowych sformułowań, którymi w dalszej części będziemy operować:

*Hipoteza statystyczna* - przypuszczenie dotyczące populacji generalnej,

*Hipoteza zerowa* – hipoteza zakładająca, że różnica między parametrami poddanymi analizie wynosi zero (zapisujemy jako H0),

*Hipoteza alternatywna* – hipoteza przeciwstawiająca się hipotezie zerowej, może przyjmować 3 formy: θ1 ≠ θ2 lub θ1 < θ2 lub θ1 > θ2 (zapisujemy jako Hk, gdzie k=1,2, 3…),

*Statystyka testowa* – zmienna losowa, przyjmująca wartość obliczoną na bazie danych z próby,

*Poziom istotności* – punkt odcięcia przedziału pokazujący prawdopodobieństwo, że wynik wystąpił w próbce losowo,

*Wartość krytyczna* – granica odrzucenia hipotezy zerowej,

*Obszar krytyczny* – obszar, w ramach którego statystyka weryfikowana może się znaleźć (wtedy hipotezę zerową odrzucamy) lub nie (wtedy nie mamy podstaw jej odrzucić).

1. Zadanie 1

W zadaniu 1 naszym celem jest przetestowanie hipotezy zerowej H0. Według niej μ0 w rozkładzie normalnym *N*(*μ,*0*.*2), z którego pochodzi pobrana próbka z populacji generalnej jest równe 1,5. W trzech przypadkach rozważamy różne hipotezy alternatywne:

1. **μ ≠ 1,5 ,**
2. **μ < 1,5 ,**
3. **μ > 1,5 .**

Pobieramy dane o długości 1000, dla których będziemy ową hipotezę testować. Weźmy za pierwszą hipotezę alternatywną testowaną H1= μ0 ≠ 1,5. Wyznaczamy wartość statystyki testowej *Z*, którą wykorzystamy do weryfikacji hipotezy. Wobec znanej wartości wariancji przyjmiemy za nią

,

mającą rozkład *N*(*μ,*0*.*2). Korzystając z biblioteki numpy otrzymujemy, że wartość *Z* jest równa około -3.15. Następnie znajdziemy obszar krytyczny, który odpowiada poziomowi istotności określonemu w poleceniu zadania. Jest on równy α = 0,05. Za pomocą biblioteki scipy.stats i polecenia norm.ppf znajdujemy kwantyl rzędu 1-α/2, równy w przybliżeniu 1,96. Ten oraz przeciwna jego wartość będą wartościami krytycznymi obszarów w dwuśladowym teście (z ang. *two-tail test*). Umieszczamy je wraz z rozkładem normalnym *N*(0,1) (odpowiadającym rozkładowi statystyki *Z*) i wartością statystyki testowej na wykresie.

Obraz zawierający linia, Wykres, tekst, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Jak można zauważyć wartość *Z* znajduje się w jednym z dwóch obszarów krytycznych odpowiadających kwantylowi 1-α/2. Wnioskujemy zatem, że należy odrzucić hipotezę zerową jako nieprawdziwą i przyjąć hipotezę alternatywną, czyli H1= μ0 ≠ 1,5

Teraz weźmy drugą hipotezę alternatywną testowaną H2= μ0 < 1,5. Wartość statystyki testowej *Z* pozostaje niezmienna, jako że nie zmienia się poziom istotności. Ponownie wyliczamy kwantyl z pomocą scipy.stats, tym razem rzędu α. Wynosi on około -1,64. Konstruujemy lewostronny jednośladowy (z ang. *one-tail test*) obszar krytyczny i przedstawiamy wszystko na wykresie.

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Jak można zauważyć wartość *Z* znajduje się w obszarze krytycznym odpowiadającym kwantylowi α. Wnioskujemy zatem, że i tym razem należy odrzucić hipotezę zerową jako nieprawdziwą i przyjąć hipotezę alternatywną, czyli H2= μ0 < 1,5.

Weźmy trzecią hipotezę alternatywną testowaną H3= μ0 > 1,5. Wartość statystyki testowej *Z* pozostaje niezmienna, jako że nie zmienia się poziom istotności. Ponownie wyliczamy kwantyl z pomocą scipy.stats, tym razem rzędu 1-α. Wynosi on około 1,64. Konstruujemy prawostronny jednośladowy obszar krytyczny i przedstawiamy to na wykresie.

Obraz zawierający linia, Wykres, tekst, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Jak widzimy wartość *Z* nie znajduje się w obszarze krytycznym odpowiadającym kwantylowi 1-α. Wnioskujemy zatem, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej H0=μ0=1,5.

Przejdziemy teraz do wyliczenia p-wartości dla każdej z omawianych hipotez.

P-wartość (z ang. *p-value*) jest rozumiana jako najmniejsza wartość poziomu istotności α, która prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej H0.

Wyznaczymy jednocześnie wszystkie 3 p-wartości dla wszystkich danych hipotez alternatywnych. Obliczymy je ponownie przy pomocy scipy.stats, z wykorzystaniem komendy norm.cdf. Dla poszczególnych hipotez będą one przyjmować wartości:

Zgodnie z definicją, jeśli wartość p jest mniejsza lub równa poziomowi istotności α (wynik analizy jest istotny statystycznie), możemy założyć odrzucenie hipotezy zerowej. Wartości p1 oraz p2 są mniejsze niż 0,05, a p3 znacznie większe (bo bliskie 1), więc na tej podstawie możemy określić, że w dwóch pierwszych przypadkach odrzucamy hipotezę zerową H0, natomiast dla hipotezy alternatywnej H3 = μ0 > 1,5 ową hipotezę zerową przyjmujemy. Weryfikacja hipotez metodą p-wartości jest nieco nowocześniejszym sposobem od analizy obszarów krytycznych.

Zakładamy teraz hipotetyczną sytuację, gdzie zwiększamy bądź zmniejszamy poziom ufności α. Prowadzi to do zmiany kwantyli obliczanych jako wartości krytyczne, a w konsekwencji do zmiany pól obszarów krytycznych oraz warunków odrzucania hipotezy zerowej metodą p-wartości. Przy odpowiednio dużym zwiększeniu poziomu ufności mogłoby to doprowadzić do przyjęcia również hipotezy H3, co oznaczałoby, że μ zawiera się zarówno w przedziale większym jak i mniejszym niż podane 1,5 co prowadziłoby do sprzeczności. Natomiast przy odpowiednio małym poziomie istotności żadna z p-wartości nie byłaby mniejsza niż α, co oznaczałoby przyjęcie hipotezy zerowej za każdym razem, czyli μ równe 1,5.

1. Zadanie 2
2. W zadaniu 2 naszym celem jest przetestowanie hipotezy zerowej H0. Według niej σ02 w rozkładzie normalnym *N*(0*.*2*, σ*2), z którego pochodzi pobrana próbka z populacji generalnej jest równe 1,5. W trzech przypadkach rozważamy różne hipotezy alternatywne:
3. **σ2 ≠ 1,5 ,**
4. **σ2 < 1,5 ,**
5. **σ2 > 1,5 .**

Pobieramy dane o długości 1000, dla których będziemy ową hipotezę testować. Weźmy za pierwszą hipotezę alternatywną testowaną H1= σ0 ≠ 1,5. Wyznaczamy wartość statystyki testowej *Z*, którą wykorzystamy do weryfikacji hipotezy. Wobec nieznanej wartości wariancji przyjmiemy za nią

mającą rozkład *N*(0.2*,*σ2), gdzie n-1 to długość próbki pomniejszona o 1, a ς-empiryczne odchylenie standardowe liczone z próbki. Korzystając z biblioteki numpy otrzymujemy, że wartość *Z* jest równa około 1110.97. Następnie znajdziemy obszar krytyczny, który odpowiada poziomowi istotności określonemu w poleceniu zadania. Jest on równy α = 0,05. Za pomocą biblioteki scipy.stats i polecenia chi2.ppf znajdujemy kwantyl rzędu 1-α/2, równy w przybliżeniu 1088,49 oraz kwantyl rzędu α/2, równy około 913,30. Będą one wyznaczać wartości krytyczne obszarów w dwuśladowym teście. Umieszczamy je wraz z rozkładem chi-kwadrat *χ2* (odpowiadającym rozkładowi statystyki *Z*) i wartością statystyki Obraz zawierający tekst, Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznietestowej na wykresie.

Jak można zauważyć wartość *Z* znajduje się w jednym z dwóch obszarów krytycznych odpowiadających kwantylowi α/2. Wnioskujemy zatem, że należy odrzucić hipotezę zerową jako nieprawdziwą i przyjąć hipotezę alternatywną, czyli H1= σ02 ≠ 1,5.

Teraz weźmy drugą hipotezę alternatywną testowaną H2= σ02 < 1,5. Wartość statystyki testowej *Z* pozostaje niezmienna, jako że nie zmienia się poziom istotności. Przyjmujemy również wartość krytyczną odpowiedniego obszaru za tę odpowiadającą kwantylowi rzędu α/2. Wiemy już, że wynosi on około 913,30. Konstruujemy lewostronny jednośladowy obszar krytyczny i przedstawiamy wszystko na wykresie.

Obraz zawierający tekst, Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Jak można zauważyć wartość *Z* nie znajduje się w obszarze krytycznym odpowiadającym kwantylowi α/2. Wnioskujemy zatem, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej H0 = σ02 =1,5.

Weźmy trzecią hipotezę alternatywną testowaną H3= σ02 > 1,5. Wartość statystyki testowej *Z* pozostaje niezmienna, jako że nie zmienia się poziom istotności. Bierzemy kwantyl rzędu 1-α/2. Wynosi on około 1088,49. Konstruujemy prawostronny jednośladowy obszar krytyczny i przedstawiamy to na wykresie.

Obraz zawierający tekst, Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Jak można zauważyć wartość *Z* znajduje się w obszarze krytycznym odpowiadającym kwantylowi 1-α/2. Wnioskujemy zatem, że tutaj także należy odrzucić hipotezę zerową i przyjąć hipotezę alternatywną, czyli H3 = σ02 > 1,5.

Przejdziemy teraz do wyliczenia p-wartości dla każdej z omawianych hipotez.

Wyznaczymy jednocześnie wszystkie 3 p-wartości dla wszystkich danych hipotez alternatywnych. Obliczymy je ponownie przy pomocy scipy.stats, z wykorzystaniem komendy chi2.cdf.

Dla poszczególnych hipotez będą one przyjmować wartości:

Zgodnie z definicją, jeśli wartość p jest mniejsza lub równa poziomowi istotności α, możemy założyć odrzucenie hipotezy zerowej. Wartości p1 oraz p3 są mniejsze niż 0,05, a p2 znacznie większe (bo bliskie 1), więc na tej podstawie możemy określić, że w przypadku pierwszym i trzecim odrzucamy hipotezę zerową H0, natomiast dla hipotezy alternatywnej H2 = σ02 > 1,5 ową hipotezę zerową przyjmujemy.

Zakładamy teraz hipotetyczną sytuację, gdzie zwiększamy bądź zmniejszamy poziom ufności α. Prowadzi to do zmiany kwantyli obliczanych jako wartości krytyczne, a w konsekwencji do zmiany pól obszarów krytycznych oraz warunków odrzucania hipotezy zerowej metodą p-wartości. Przy odpowiednio dużym zwiększeniu poziomu ufności mogłoby to doprowadzić do przyjęcia również hipotezy H2, co oznaczałoby, że σ2 zawiera się zarówno w przedziale większym jak i mniejszym niż podane 1,5 co prowadziłoby do sprzeczności. Natomiast przy odpowiednio małym poziomie istotności żadna z p-wartości nie byłaby mniejsza niż α, co oznaczałoby przyjęcie hipotezy zerowej za każdym razem, czyli σ2 równe 1,5.

1. Błędy
2. Podsumowanie

Za cel raportu postawiliśmy rozwiązanie listy 8 z uwzględnieniem weryfikacji hipotez postawionych w treści oraz analizy błędów I i II rodzaju oraz mocy testów. Na podstawie uzyskanych wyników możemy wyciągnąć następujące wnioski:

* Weryfikacja hipotez alternatywnych z zadania 1 pozwoliła na rozeznanie w wielkości parametru nieznanej wartości średniej rozkładu normalnego, z którego pochodziła pobrana próbka, przy pomocy statystyki testowej o rozkładzie *N*(0,1) oraz p-wartości, ponadto otrzymaliśmy odpowiedź na to, jakim rzędem poziomu istotności powinniśmy w tym przypadku operować, aby poprawnie móc zanalizować pod tym kątem otrzymane dane, dodatkowo poznaliśmy dobrze obie metody owej weryfikacji,
* Weryfikacja hipotez alternatywnych z zadania 2 pozwoliła na rozeznanie w wielkości parametru nieznanej wariancji z rozkładu normalnego, z którego pochodziła druga pobrana próbka, przy pomocy statystyki testowej o rozkładzie *χ2* oraz p-wartości, ponadto otrzymaliśmy odpowiedź na to, jakim rzędem poziomu istotności powinniśmy w tym przypadku operować, aby poprawnie móc zanalizować pod tym kątem otrzymane dane,
* Tutaj wpisz czego ty się dowiedziałeś antoni,

Przeanalizowanie wszystkich danych pozwala na większe zrozumienie testowanych danych oraz daje dobrą bazę do wykorzystania na przyszłość w analizie innych próbek, na które natkniemy się w przyszłości.